第 二 章 极 限

§2.1 序列极限定义

定义域为 $\mathbf{N}$ 的函数也称为序列，记为 $f(1), f(2),\Lambda, f(n),\Lambda$ ，习惯上记为 $x_1, x_2,\Lambda, x_n,\Lambda$ ，或简单地记为$\{x_n\}$。其中x_n称为通项，它可由公式给出，也可由其它法则给出。

如： $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\Lambda,\frac{1}{n},\Lambda$

3，3.1，3.14，3.141，3.1415, ...

在信号处理和图像处理中，计算机无法处理连续变量的函数，都要通过采样来处理，一元函数经采样后就得到一个序列。

这里我们关心的是当n越来越大时，序列x_n的行为特点，如$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\Lambda,\frac{1}{n},\Lambda$ ，当n越来越大时，$\frac{1}{n}$越来越接近于 0。我们称它以 0 为极限。

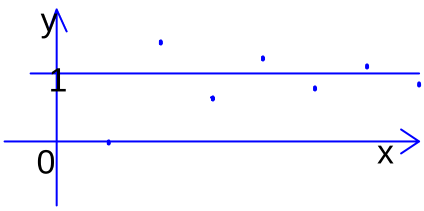
描述定义 给定序列$\{x_n\}$，当n无限增大时，x_n无限地接近于a，称a为当n趋向无穷时序列$\{x_n\}$的极限，记作

$$x_n \to a \quad (n \to +\infty)$$

或

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \text{ 。}$$

例 1 $x_n = 1+\frac{(-1)^n}{n}$， $x_n \to 1 \ (n \to \infty)$。



例 2 $x_n = (-1)^n$，没极限。

如何精确地刻画“无限接近”这一概念，我们用“误差”方法。而“误差”是用绝对值刻画的。

定义 $|x|=\begin{cases} x & x\ge 0\text{，}\\ -x & x<0\text{。}\end{cases}$

命题 $|x|=\operatorname{sgn} x\cdot x$。

格运算 $a\vee b=\max(a,b)=\dfrac{(a+b)}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}$

$$a\wedge b=\min(a,b)=\frac{(a+b)}{2}-\frac{|a-b|}{2}$$

几何意义

$\dfrac{(a+b)}{2}$ **为线段**$\overrightarrow{ab}$ **（或**$\overrightarrow{ba}$**）的中点，**$|a-b|$**为**a,b**距离，**$\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}$**为中点加上两点距离之半，当然就是**$a,b$**中最大的一点。**

性质 1． $r>0,\quad |x|<r\Leftrightarrow -r<x<r$，

$|x-a|<r\Leftrightarrow a-r<x<a+r$。

2． $|x+y|\le|x|+|y|$，**等号成立**$\Leftrightarrow$ x,y **同号，推广** $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ 。

3． $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$。

4． $|ab|\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$ 。

注： 4 也可以写成$\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$**，它表明对任何两个非负实数，它们的几何平均小于等于算术平均。**

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ **就是说**x_n**与**a**的误差要多小就有多小，只要**n**充分大。**

定义 $\forall e>0,\ \exists N\in\mathbf{N}$**，使得当**$n>N$**时，有**$|x-a|<e$，**则称序列**$\{x_n\}$**的极限为**$a$**，记作** $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ **或** $x_n\to a\quad(n\to+\infty)$。

几何意义 **称**$\{x:|x-a|<e\}=(a-e,a+e)$**为**a**的**$e-$**邻域，**$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$**是指对**$a$**的任何**$e-$**邻域，序列**$\{x_n\}$**在这一**$e-$**邻域外只有有限项。**

例 1 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,\quad(0<q<1)$。

证 $\forall e>0$，**不妨设** $e<1$，**要使** $\left|q^n-0\right|=q^n<e$ ，**只要** $n\lg q<\lg e$ （**注意这里** $\lg q<0$，$\lg e<0$），**只要** $n>\dfrac{\lg e}{\lg q}$。 **取** $N=\left[\dfrac{\lg e}{\lg q}\right]$，**则当** $n>N$ **时，就有** $\left|q^n-0\right|<e$， **即** $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$。

例 2 **求证** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$。

证法 1 **先设** $a>1$，$\forall e>0$，**要使** $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\sqrt[n]{a}-1<e$， **只要** $\sqrt[n]{a}<1+e$，**只要** $\dfrac{1}{n}\lg a<\lg(1+e)$，**只要** $n>\lg a\big/\lg(1+e)$。

取 $N=\left[\lg a\big/\lg(1+e)\right]$， **当** $n>N$ **时，就有** $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<e$，**即** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。**对** $0<a<1$，**令** $b=\dfrac{1}{a}$，**则** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}}=1$。

证法 2 **令** $\sqrt[n]{a}-1=h_n$，**则** $a=(1+h_n)^n=1+nh_n+\Lambda+h_n^n>nh_n$，$0<h_n<\dfrac{a}{n}$ $\forall e>0$，**要使** $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=h_n<e$， **只要** $\dfrac{a}{n}<e$ ，**取** $N=\left[\dfrac{a}{e}\right]$，**只要** $n>N$ ，**就有** $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<e$，**即** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

例 3 **证** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0 \quad (a>1)$。

证 **因为** $\dfrac{a^n}{n!}=\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\Lambda\cdot\dfrac{a}{[a]}\cdot\dfrac{a}{[a]+1}\cdot\Lambda\cdot\dfrac{a}{n}<\dfrac{a^{[a]}}{[a]!}\cdot\dfrac{a}{n}=c\cdot\dfrac{a}{n} \quad (c=\dfrac{a^{[a]}}{[a]!})$，

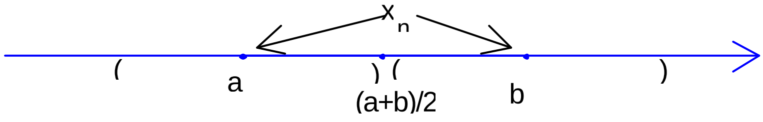
$\forall e>0$， **要使** $\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|=\dfrac{a^n}{n!}<e$，**只要** $\dfrac{c\cdot a}{n}<e$，**取** $N=\left[\dfrac{c\cdot a}{e}\right]$，**则只要** $n>N$，**就有** $\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|<e$，**即** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$。

总结 **用定义求极限或证明极限的关键是适当放大不等式，关键的追求有两点，一是把隐性表达式变成显性表达式，在重锁迷雾中看清庐山真面目，二是抓住主要矛盾，舍去次要矛盾；要取舍合理，不能放大得过份。**

§2.2 序列极限的性质和运算

象四则运算一样，我们把求极限也看成是一种运算，但这种运算是施加在无穷序列上，取值是一个实数，如果存在的话，但还有大量不存在极限的序列。

定理 1（唯一性）若序列的极限存在，则极限值唯一。



证 反证法，如果不然，至少有两个不等的极限值，设为a和b，$a<b$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$，取$e_0 = \dfrac{b-a}{2} > 0$，由极限定义，$\exists N_1$，使得当$n > N_1$时， 有

$$|x_n - a| < e_0\text{，}\qquad x_n < a + e_0 = \frac{a+b}{2}$$

又$\exists N_2$，使得当 $n > N_2$时，有

$$|x_n - b| < e_0,\qquad \frac{a+b}{2} = b - e_0 < x_n$$

则当$n > \max(N_1, N_2)$时，有

$$x_n < \frac{a+b}{2} < x_n$$

矛盾！

定义 若 $\exists M > 0$，使得$|x_n| \le M$，$\forall n$，则称 $\{x_n\}$有界。

定理 2（有界性）若序列$\{x_n\}$有极限，则$\{x_n\}$有界。

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，取 $e_0 = 1$，按定义，$\exists N$，使得当$n > N$ 时，有

$$|x_n - a| < e\text{，}\qquad |x_n| \le |a| + |x_n - a| < |a| + 1\text{ 。}$$

令$M = \max(|a|+1, |x_1|, \Lambda, |x_N|)$，则对$\forall n \in N$，有$|x_n| \le M$，故$\{x_n\}$有界。

下面定理表明求极限这种运算与四则运算可交换。

定理 3（四则运算） 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则

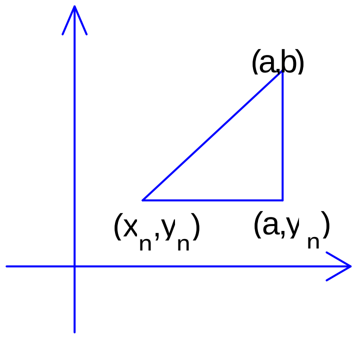
1）$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$

2）$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

3）若 $b \neq 0, y_n \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x_n}{y_n}) = \dfrac{a}{b}$ 。

证：1）$\forall e > 0$ ，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\exists N_1$，使得当 $n > N_1$ 时，有 $|x_n - a| < \dfrac{e}{2}$。又由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，$\exists N_2$，使得当 $n > N_2$ 时，有 $|y_n - b| < \dfrac{e}{2}$。 取 $N = \max(N_1, N_2)$，则当 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}&\left|\,(x_n \pm y_n) - |a \pm b|\,\right| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &\leq \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e。\end{aligned}$$



即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$。

2） **分析**

$$|x_n \cdot y_n - a\cdot b| = |x_n \cdot y_n - y_n \cdot a + y_n \cdot a - a \cdot b|$$
$$\leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|$$

加一项，减一项称为插项方法，是一个至关重要的方法。

由有界性定理，$\exists M_1 > 0$，$\forall\, n$，$|y_n| \leq M_1$。令 $M = \max(M_1, |a|) > 0$， $\forall\, e > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\exists N_1$ ，使得当 $n > N_1$ 时，有 $|x_n - a| < \dfrac{e}{2M}$。又由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，$\exists N_2$，使当 $n > N_2$ 时，有 $|y_n - b| < \dfrac{e}{2M}$。取 $N = \max(N_1, N_2)$，则当 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}|x_n \cdot y_n - a \cdot b| &\leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \\ &\leq M(|x_n - a| + |y_n - b|) \\ &\leq M(\frac{e}{2M} + \frac{e}{2M}) = e.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$。

3） 由 2），只要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{b}$。

分析

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{y_n - b}{y_n b}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}|y_n - b|, \quad |y_n| \geq \frac{|b|}{2} \quad \text{当} n \text{充分大时。}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$**，令**$e_0 = \dfrac{|b|}{2} > 0$,$\exists N_1$**，使当**$n > N_1$**时，有**$|y_n - b| < e_0$**，即**

$$|y_n| \ge |b| - |y_n - b| \ge |b| - e_0 = \frac{|b|}{2}。$$

$\forall e > 0$, **由** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$**，**$\exists N_2$**，使得当**$n > N_2$**时，有**$|y_n - b| < \dfrac{|b|^2}{2} e$**。**

取$N = \max(N_1, N_2)$**，则当**$n > N$ **时，有**

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{y_n - b}{y_n \cdot b}\right| \le \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2} e \quad ,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{b}$**。**

用归纳法，可得有限个序列的四则运算：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_n^{(k)} = \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} \text{ ，}$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{N} x_n^{(k)} = \prod_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} \quad 。$$

但将上述N **换成**∞**，一般不成立。事实上**$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ **或**$\prod\limits_{k=1}^{\infty}$ **本身也是一种极限，两种极限交换次序是个非常敏感的话题，是高等分析中心课题，一般都不能交换，在一定条件下才能交换，具体什么条件，到第三册我们会系统研究这个问题。**

下面定理表明求极限是保序的运算。

定理 4　给定两个序列$\{x_n\}$**，**$\{y_n\}$**，若**$\forall n$**，**$x_n \le y_n$ **且**$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$**，**$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$**，则**$a \le b$ **。**

证　反证法，如若不然，$a > b$**，取**　$e_0 = \dfrac{a-b}{2}$**，由**$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$**，**$\exists N_1$**，使得当**$n > N_1$**时，有**

$$|x_n - a| < e_0 \text{，} \qquad x_n > a - e_0 = \frac{a+b}{2}$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$**，**　$\exists N_2$**，使得当**$n > N_2$**时，有**

$$|y_n - b| < e_0 \text{，} \qquad y_n < b + e_0 = \frac{a+b}{2}$$

当$n>\max(N_1,N_2)$时，有$x_n>\frac{a+b}{2}>y_n$， 矛盾。

定理 5（两边夹或逼夹定理） 给定序列$\{x_n\},\{y_n\}$和$\{z_n\}$，满足$\forall n$，$x_n\le z_n\le y_n$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$。

证 $\forall e>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\exists N_1$，使得当$n>N_1$时，有

$$|x_n-a|<e，\quad 即 \quad a-e<x_n<a+e，$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$， $\exists N_2$，使得当$n>N_2$时，有

$$|y_n-a|<e，\quad 即 \quad a-e<y_n<a+e。$$

取$N=\max(N_1,N_2)$，则当 $n>N$ 时，有 $a-e<x_n\le z_n\le y_n<a+e$ 或 $|z_n-a|<e$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$。

例 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>1)$

在证明中，令$h_n=\sqrt[n]{a}-1>0$， $a=(1+h_n)^n$，得$0<h_n<\frac{a}{n}$，由此推出$h_n\to 0$。

由此例也看出由$x_n<z_n<y_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，也推出$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$。

定义 极限为0的变量称为无穷小量。

推论

1) $x_n\to 0\Leftrightarrow |x_n|\to 0$，无穷小量加绝对值仍为无穷小量。

2) $x_n\to 0, |y_n|\le M\Rightarrow x_n\cdot y_n\to 0$，无穷小量与有界变量的积仍为无穷小量。

3) $x_n\to a\Leftrightarrow y_n=x_n-a\to 0$，$(x_n=a+y_n)$ 变量有极限a的充要条件为它可分解为a加一个无穷小量。

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+1}{3n^2+n+9}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+1}{3n^2+n+9}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{9}{n^2}}=\frac{4}{3}$。

例 3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a+\Lambda+a^n) \qquad (0<a<1)$。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a+\Lambda+a^n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1-a}=\frac{1}{1-a}$。

例 4　设$a,b>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b)$。

证 $\max(a,b)=\sqrt[n]{\max(a,b)^n}\le\sqrt[n]{a^n+b^n}\le\sqrt[n]{2\max(a,b)^n}\to\max(a,b)$。

例 5　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

证　令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n$,

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n{}^2+\Lambda+h_n{}^n\ge\frac{n(n-1)}{2}h_n{}^2\quad(n>3),$$

$$0<h_n<\frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

两边夹推出 $h_n\to0$，即$\sqrt[n]{n}\to1$。

§2.3 确界与单调有界序列

决定一个序列是否有极限，目前我们只能用定义判定，但那必须先知道极限值a，这就是说定义不能解决极限存在问题。 事实上，这是个很深刻的问题，这一节我们给出一个极限存在的判定定理，但需到第三册才能证明它，这里将给出能够令人接受的说明。用它我们可以定义一个新的无理数e，在讲指数函数和对数函数时我们已经使用过它。

定义　$E\subseteq\mathbf{R}$, 如果$\exists M$, 使得对$\forall x\in E$, 有$x\le M$, 则称M 是E 的一个上界。

有没有最小上界？ 何谓最小上界，且看下面的定义。

定义 $E\subseteq\mathbf{R}$, 数M 若满足

1）M 是E 的上界

2）M' 是E 任一上界，必有$M\le M'$

则称M 是E 的最小上界或上确界，记作$M=\sup E$　或$M=\sup\limits_{x\in E}x$。

定理 1　$M=\sup E$　充要条件

1）　M 是E 上界，

2）　$\forall e>0,\exists x'\in E$ 使得$x'>M-e$ 。

证　必要性，用反证法。设 2）不成立，则$\exists e_0>0$, 使得$\forall x\in E$，均有 $x\le M-e_0$，与M 是上确界矛盾。

充分性， 用反证法。设M 不是E 的上确界，即$\exists M'$是上界，但$M>M'$。令$e=M-M'>0$，由 2)，$\exists x'\in E$，使得$x'>M-e=M'$，与M'是E 的上界矛盾。

定义 2 $E \subseteq \mathbf{R}$，m 满足

1) m 是下界，
2) m' 是 E 的任意下界，必有 $m' \le m$。

则称 m 为 E 的下确界或最大下界。记作：$\inf E$ 或 $\inf\limits_{x \in E} x$。

定理 2 一个非空的，有上（下）界的集合，必有上（下）确界。

该定理要到第三册方能证明。这里我们给一个可以接受的说明。$E \subseteq \mathbf{R}$，E 非空，$\exists x \in E$，我们可以找到一个整数 p，使得 p 不是 E 上界，而 $p+1$ 是 E 的上界。然后我们遍查 $p.1$，$p.2$，Λ，$p.9$ 和 $p+1$，我们可以找到一个 q_0，$0 \le q_0 \le 9$，使得 $p.q_0$ 不是 E 上界，$p.(q_0+1)$ 是 E 上界，如果再找第二位小数 q_1，Λ， 如此下去，最后得到 $p.q_0 q_1 q_2 \Lambda$，它是一个实数，即为 E 的上确界。

定义 $\{x_n\}$ 称为单调上升的，若 $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \Lambda \le x_n \le \Lambda$ 。

$\{x_n\}$ 称为单调下降的，若 $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \Lambda \ge x_n \ge \Lambda$ 。

定理 3 若序列 $\{x_n\}$ 单调上升（下降），有上（下）界，则序列存在极限。

证 设 $\{x_n\}$ 单调上升，即 $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \Lambda \le x_n \le \Lambda$ ，有上界，即 $\exists M$ ，使得 $x_n \le M$。

考虑集合 $E = \{x_n \mid n \in N\}$，它非空，有界，定理 2 推出它有上确界，记为 $a = \sup\limits_{n \in N} x_n$。我们验证 $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$。

$\forall e > 0$，由上确界的性质，$\exists N$，使得 $a - e < x_N$，当 $n > N$ 时，由序列单调上升得 $a - e < x_N \le x_n$ ，再由上确界定义，$x_n \le a < a + e$ ，有 $a - e < x_n < a + e$ ，即 $|x_n - a| < e$，也就是说 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a = \sup\limits_{n \in N} x_n$。

同理可证若 $\{x_n\}$ 单调下降，有下界，也存在极限，且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \inf\limits_{n \in N} x_n$。

例 1 证明 $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 存在。

证 令 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$，先证它单调上升，

$$
\begin{aligned}
x_n &= (1+\frac{1}{n})^n \\
&= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1}) \\
+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}) > x_n
\end{aligned}
$$

再证它有界

$$
\begin{aligned}
x_n &\le 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\
&\le 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3
\end{aligned}
$$

由定理 3**，知**$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$**存在，值记为**$e$**，它是一个无理数** $e = 2.7182818\cdots$ **。**

称$\log_e x = \ln x$**为自然对数，何以称为“自然”，下章将见分晓。**

§2.4 确界存在定理与区间套定理

2.4.1 确界存在定理

我们曾引入有界数集的确界概念，今证明它的存在性（记号a**、**b**、**c**表示实数）**

定理 1　非空有上界的数集E**必存在上确界。**

证明　设$E=\{x\}$**非空，有上界**b**：** $\forall x\in E$**，** $x\le b$**。**

（1）　**若**E**中有最大数**x_0**，则**x_0**即为上确界；**

（2）　**若**E**中无最大数，用下述方法产生实数的一个分划；取**E**的一切上界归入上类** B**，其余的实数归入下类**A**，则**$(A\,|\,B)$**是实数的一个分划。**

1°　A**、**B**不空。首先**$b\in B$**。其次**$\forall x\in E$**，由于**x**不是**E**的最大数，所以它不是**E**的上界，即**$x\in A$**。这说明**E**中任一元素都属于下类**A**；**

2°　A**、**B**不漏性由**A**、**B**定义即可看出；**

3°　A、B 不乱。设 $a\in A$，$b\in B$。因 a 不是 E 的上界，$\exists x\in E$，使得 $a<x$，而 E 内每一元素属于 A，所以 $a<x<b$。

4°　由 3° 的证明可见 A 无最大数。

所以 $(A\,|\,B)$ 是实数的一个分划。由戴德金定理，知上类 B 必有最小数，记作 c。

$\forall x\in E$，由 1° 知 $x\in A$，即得 $x<c$。这表明 c 是 E 的一个上界。若 b 是 E 的一个上界，则 $b\in B$，由此得 $c\le b$，所以 c 是上界中最小的，由上确界定义，c 为集合 E 的上确界，记作　$c=\sup E$。

推论　非空的有下界的集合必有下确界。

事实上，设集合 $E=\{x\}$ 有下界 b，则非空集合 $E'=\{x\,|\,-x\in E\}$ 有上界 $-b$，利用集合 E' 上确界的存在性，即可得出集合 E 的下确界存在。

由第二章知道，若集合 E 无上界，记作 $\sup E=+\infty$；若集合 E 无下界，记作 $\inf\ E=+\infty$，这样一来，第二章证明了的单调上升（下降）有上界（下界）的序列 $\{x_n\}$，必有极限 $\sup\limits_{x\in N} x_n\,(\inf\limits_{x\in N} x_n)$ 的定理现在有了严格的理论基础了。且对单调上升（下降）序列 $\{x_n\}$，总有

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\sup_{x\in N} x_n \quad (\inf_{x\in N} x_n)。$$

定理 1 解决了非空有上界集合的上确界存在性问题，我们可以利用上确界的存在性，得出我们所研究的某一类量（如弧长）的存在性。

若全序集中任一非空有上界的集合必有上确界，我们称该全序集是完备的。定理 1 刻划了实数集是完备的。

例1　证明实数空间满足阿基米德原理。

证明　$\forall b>a>0$，要证存在自然数 n 使 $na>b$。假设结论不成立，即

$$na\le b,\qquad (n=1,2,\Lambda),$$

则数集 $E=\{na\}$ 有上界 b，因此有上确界 c，使 $na\le c\quad(n=1,2,\Lambda)$，也就有 $(n+1)a\le c\quad(n=1,2,\Lambda)$，或　$na\le c-a\quad(n=1,2,\Lambda)$。这表明 $c-a$ 是集合 E 的上界，与 c 是上确界矛盾。所以总存在自然数 n，使 $na>b$。

例2　1）证明序列 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\Lambda+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 的极限存在；

2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\,1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\Lambda+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\,]$。

解　1）因 $x>-1$ 时有

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad (x \neq 0),$$

所以 $$\frac{1}{1+k} < \ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, \Lambda),$$

即有 $$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n > \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0。$$

这表明序列$\{x_n\}$有下界。又

$$x_n - x_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} = \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} > 0,$$

故序列$\{x_n\}$下降。因此序列极限存在，记极限值为c。于是

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = c + e_n,$$

或 $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = c + \ln n + e_n \qquad (\lim_{n\to+\infty} e_n = 0)。$$

2) 因

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = c + \ln(2n) + e_{2n} - [c + \ln n + e_n]$$
$$= \ln 2 + e_{2n} - e_n$$

所以 $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2,$$ 又 $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2,$$

即得 $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2。$$

2.4.2 区间套定理

定理 2 设$[a_n, b_n]$是一串闭区间，满足：

（1） 对任何自然数n，都有$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$，即 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$。

（2） 当$n \to +\infty$时，区间$[a_n, b_n]$长度趋于0，即 $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$。

则有$\lim_{n\to+\infty} a_n = c = \lim_{n\to+\infty} b_n$，且$c$是一切区间的唯一公共点：$\mathrm{I}_{n=1}^{+\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$。

证明 由假设(1)知，序列$\{a_n\}$单调上升，有上界b_1；序列$\{b_n\}$单调下降，有下界a_1。因而有

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c_1,\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = c_2.\quad a_n \le c_1 \le c_2 \le b_n。$$

再由假设（2）知

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = c_2 - c_1 = 0,$$

记$c_1 = c_2 = c$**。 从而有**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c = \lim_{n\to+\infty} b_n。$$

若还有c^***满足**$a_n \le c^* \le b_n$**，令**$n \to +\infty$**，得**$c^* = c$**。故**c**是一切**$[a_n, b_n]$**的唯一公共点。证毕。**

这个定理称为区间套定理。关于定理的条件我们作两点说明：

（1） 要求$[a_n, b_n]$**是有界闭区间的这个条件是重要的。若区间是开的，则定理不一定成立。如**

$$(a_n, b_n) = (0,\ \frac{1}{n})。$$

显然有 $(0, \dfrac{1}{n+1}) \subset (0, \dfrac{1}{n})$， **但** $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}(0, \dfrac{1}{n}) = \varnothing$。

如果开区间套是严格包含： $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$**，这时定理的结论还是成立的。**

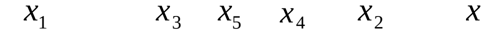
（2） 若$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$**，但** $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) \ne 0$**，此时仍有** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c_1$**，**$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c_2$**，但**$c_1 < c_2$**，于是对任意的**$c$**，**$c_1 \le c \le c_2$**，都有**$c \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n, b_n]$**。**

全序集中任一区间长趋于零的区间套有非空交集，则称该全序集是完备的，定理 2 刻划实数集是完备的（这里完备定义与上段完备定义是等价的）。定理 2 也给出通过逐步缩小搜索范围，找出所求点的一种方法。

例3 序列$\{x_n\}$**由下列各式**

$$x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}\quad (n = 3, 4, \cdots)$$

所确定（见下图）。证明极限$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$**存在，并求此极限。**



证明 当$a = b$**时，**$x_n = a$**，故**$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$**。**

当$a \ne b$**时，若取**$a_n = \min(x_{n+1}, x_n)$**，**$b_n = \max(x_{n+1}, x_n)$**，**$(n = 1, 2, \cdots)$**。**

则由条件，显然可得一串区间套：

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n] \qquad (n=1,2,\Lambda)。$$

由已知条件

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})，$$

于是

$$b_n-a_n=|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|=\frac{1}{2^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

$$=\Lambda=\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|=\frac{1}{2^{n-1}}|b-a|\to 0 \qquad (n\to+\infty),$$

由区间套定理，存在 c 满足：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=c=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$。注意到 $x_n\in[a_n,b_n]$，所以

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$。

下面来求 c。由 $x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})$，令 $n=2,3,\Lambda,k-1$ 得一串等式：

$$x_3-x_2=-\frac{1}{2}(x_2-x_1)；$$

$$x_4-x_3=-\frac{1}{2}(x_3-x_2)；$$

$$\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$$

$$x_k-x_{k-1}=-\frac{1}{2}(x_{k-1}-x_{k-2})。$$

将它们相加，得 $x_k-x_2=-\frac{1}{2}(x_{k-1}-x_1)$，令 $k\to+\infty$，得 $c-x_2=-\frac{1}{2}(c-x_1)$

所以
$$c=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2=\frac{1}{3}(a+2b)。$$

2.4.3 子序列与波尔察诺定理

给定序列 $x_1,x_2,\Lambda,x_n,\Lambda$，考虑由它的一部分元素，而不变更次序所构成的序列：

$x_{n_1},x_{n_2},\Lambda,x_{n_k},\Lambda$，称为 $\{x_n\}$ 的一个子序列。

关于子序列 $\{x_{n_k}\}$ 的序号 n_k 需要说明三点：

(1) n_k 是一个严格上升的自然数列；$n_1<n_2<\Lambda<n_k<\Lambda$

(2) 子序列 $\{x_{n_k}\}$ 的序号不是 n_k，而是 k，n_k 是 k 的函数，它表明子序列与原序列的关系。x_{n_k} 表示子序列中的第 k 项，是原序列的第 n_k 项。

（3） $n_k \ge k$。所以 $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$。

例如序列$\{x_{k+l}\}$（l为某一正整数）是序列$\{x_n\}$的子序列。它是由原序列去掉前l项所得，这里$n_k = k + l$。

又如序列$\{x_{2k}\}$，$\{x_{2k-1}\}$是序列$\{x_n\}$的子序列，它们分别是由原序列取偶数项和奇数项所组成的序列，前者$n_k = 2k$，后者$n_k = 2k-1$。

对子序列再抽子序列，应记作$\{x_{n_{k_i}}\}$，它仍然是原序列的子序列。序列本身也可以说是它自己的子序列。

子序列概念本身是容易理解的。难点倒是它的表现形式，或者说是它的记号。

定理 3 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$，则$\{x_n\}$的任一子序列$\{x_{n_k}\}$都以$c$为极限。

证明 $\forall e > 0$，由 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$，$\exists N$，当$n > N$时，有$|x_n - c| < e$。因 $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$，所以对于$N$，$\exists k_0$，当$k > k_0$时，有$n_k > N$。从而当$k > k_0$时，有$|x_{n_k} - c| < e$，即 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = c$。

注 1 定理当$c = +\infty$或$-\infty$时，结论仍成立。

注 2 若序列$\{x_n\}$有两个子序列极限不等，则序列$\{x_n\}$无极限。

若原序列没有极限，它可以有收敛的子序列。如序列 $1,0,1,0,\Lambda$，它的奇数项组成的子序列有极限1。是否任意序列都有收敛子序列呢？这就是下面定理。

定理 4 （波尔察诺） 有界序列必有收敛子序列。

证明 设$a \le x_n \le b$，用中点$c_1 = \dfrac{a+b}{2}$将$[a,b]$一分为二，则两个子区间$[a,c_1]$和$[c_1,b]$中至少有一个含有$\{x_n\}$中无穷多项，选出来记为$[a_1,b_1]$，在其中选一项x_{n_1}。用中点$c_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$将$[a_1,b_1]$一分为二，则两个子区间$[a_1,c_2]$和$[c_2,b_1]$中至少有一个含有$\{x_n\}$中无穷多项，选出来记为$[a_2,b_2]$，在其中选一项x_{n_2}，使得$n_2 > n_1, \Lambda$。最后得一区间套$[a_k,b_k]$，满足

$$[a_{k+1},b_{k+1}] \subset [a_k,b_k],$$

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

$$x_{n_k} \in [a_k,b_k],\ n_{k+1} > n_k。$$

由区间套定理，$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c$，又由于$a_k \le x_{n_k} \le b_k$，有$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$。

习题

1　设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，其最大值和最小值分别为M和$m(m<M)$。求证：必存在区间$[\alpha,\beta]$，满足条件：

（1）$f(\alpha)=M, f(\beta)=m$或$f(\alpha)=m, f(\beta)=M$；

（2）$m<f(x)<M$，当$x\in(\alpha,\beta)$。

2　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$[a,b)$上右导数存在。求证：

（1）若$f'_+(x)\ge 0$，则$f(x)$递增；

（2）若$f'_+(x)\le 0$，则$f(x)$递减；

（3）若$f'_+(x)\equiv 0$，则$f(x)$为一常数。

3　设$f(x)\in C[0,+\infty)$，且有界；对于$\forall a\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)=a$在$[0,+\infty)$上只有有限个根或无根。求证：$\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在。

4　求证：序列$\{a_n\}$有界的充要条件是：$\{a_n\}$的任何子序列$\{a_{n_k}\}$，都有收敛的子序列。

5　设$\{a_n\}$为有界序列，且任一收敛的子序列都有相同的极限值a。求证：$\{a_n\}$也以a为极限。

§2.5 函数的极限

$x_0\in\mathbf{R}$, $U(x_0;h)=(x_0-h,x_0+h)=\{x\mid |x-x_0|<h\}$ 称为x_0的一个邻域，简记$U(x_0)$。$U_0(x_0;h)=U(x_0;h)\setminus\{x_0\}$ 称为x_0的一个空心邻域，简记为$U_0(x_0)$。

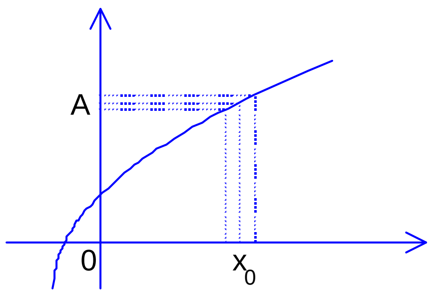
定义　设$f(x)$在$U_0(x_0)$上定义。$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得当$x\in U_0(x_0;\delta)$时　（即$0<|x-x_0|<\delta$），有

$$\left|f(x)-A\right|<e \qquad （\text{即}\ f(x)\in U(A;e)）$$

则称 x **趋向于** x_0 **时，函数** $f(x)$ **的极限为** A**，记作**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0)。$$

几何解释 **任给** $U(A;e)$**，存在** $U_0(x_0;d)$**，使得当** $x\in U_0(x_0;d)$ **时，有** $f(x)\in U(A;e)$**，则称** $f(x)\to A \quad (x\to x_0)$。



例 1 **证明** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a} \quad (a\neq 0)$。

证 **注意到** $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right|=\dfrac{|x-a|}{|x|\cdot|a|}$**，要想它任意小，** $|x-a|$ **可任意小，** $|x|$ **却不能任意小，当** $x\to a$ **时，它必须远离零点。当** $|x-a|<\dfrac{|a|}{2}$ **时，** $|x|\geq|a|-|x-a|>\dfrac{|a|}{2}$ **就远离零点了。**

$\forall e>0$，**取** $d=\min\left(\dfrac{|a|}{2},\dfrac{|a|^2}{2}e\right)$ **，则当** $0<|x-a|<d$ **时，有** $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right|\leq\dfrac{2\,|x-a|}{a^2}<e$。

函数的极限与序列的极限类似，也有相应的性质，证明也采用相同的思想，把“ $e-N$ **”换成“** $e-d$ **”。 我们把相应定理罗列出来，选其中一部分给出证明，其余的证明留给同学们作练习。**

定理 1（唯一性） **若** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **极限存在，则极限值唯一。**

定理 2（局部有界性） **若极限** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **存在，则函数** $f(x)$ **在** x_0 **的某一空心邻域上有界。**

定理 3 **设** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$， **则**

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm g(x)=A\pm B$，

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$，

3) $B \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$。

定理 4　设在$U_0(x_0)$**上，**$f(x)\le g(x)$**且**$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$**，则**$A\le B$。

定理 5　设在$U_0(x_0)$**上有** $f(x)\le g(x)\le h(x)$, **且**$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, **则** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$。

定理 2 的证明

取$e_0=1$, **由** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\exists d>0$, **当**$0<|x-x_0|<d$ **时**, **有**$|f(x)-A|<1$,

即

$$|f(x)|\le|A|+|f(x)-A|\le|A|+1，$$

说明$f(x)$**在**$U_0(x_0;d)$**上有界，**$|A|+1$**就是一个界。**

定理 3 之 3）的证明

只要证 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{B}$ **，令** $e_0=\dfrac{|B|}{2}>0$ **，由** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ **，**$\exists d_1>0$ **使得当** $0<|x-x_0|<d_1$**时，有**$|g(x)-B|<\dfrac{|B|}{2}$**， 即** $|g(x)|\ge|B|-|g(x)-B|\ge|B|-\dfrac{|B|}{2}=\dfrac{|B|}{2}$。

$\forall e>0$, **仍然由** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ **，**$\exists d_2>0$, **使得当** $0<|x-x_0|<d_2$ **时，有** $|g(x)-B|<\dfrac{|B|^2}{2}e$ 。

取$d=\min(d_1,d_2)$ **，则当**$0<|x-x_0|<d$ **时，有**

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|g(x)-B|}{|g(x)||B|}\le\frac{2}{|B|^2}|g(x)-B|<\frac{2}{|B|^2}\cdot\frac{|B|^2}{2}e=e$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{B}$。

定理 5 的证明　$\forall e>0$, **由**$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$**，**$\exists d_1>0$**，使得当**$0<|x-x_0|<d_1$**时，有**$|f(x)-A|<e$**，即** $A-e<f(x)<A+e$ 。

又由$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$**，**$\exists d_2>0$**，使得当**$0<|x-x_0|<d_2$**时 ，有**$|h(x)-A|<e$ **，**

即$A-e<h(x)<A+e$ 。

令$d = \min(d_1, d_2)$，则当$0<|x-x_0|<d$时，有$A-e<f(x)\le g(x)\le h(x)<A+e$

即 $|g(x)-A|<e$，故 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$。

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$。

证 先设$a=0$，要证 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$，$\forall e>0$，要使$|\sqrt{x}|=\sqrt{x}<e$，取$d=e^2$，则当$0<x<d$时，有 $|\sqrt{x}|=\sqrt{x}<\sqrt{d}<e$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$。

再设$a>0$，$\forall e>0$，要使$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<e$， 注意到

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\le\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|，$$

只要 $\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<e$，且 $x>0$，取 $d=\min(\sqrt{a}e,\frac{a}{2})$，则当 $0<x-a<d$ 时，有 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<e$， 即 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$。

§2.6 函数极限的推广

我们已经建立极限概念 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，我们想推广它：(1) $x\to x_0$可被$x\to x_0+0$，$x\to x_0-0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$代替，(2) $f(x)\to A$可被 $f(x)\to+\infty$, $-\infty$, ∞代替， 严格地说这时极限已经不存在了，我们称之为广义极限。

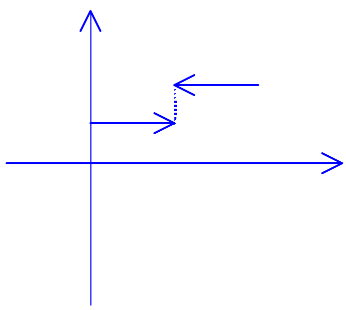
1． 单侧极限

点x_0的右邻域指的是 $U^+(x_0;h)=\{x\,|\,x_0\le x<x_0+h\}$，

点x_0的左邻域指的是 $U^-(x_0;h)=\{x\,|\,x_0-h<x\le x_0\}$，

点x_0的右空心邻域指的是 $U_0^{\;+}(x_0;h)=U^+(x_0;h)\setminus\{x_0\}$，

点 x_0 的 左 空 心 邻 域 指 的 是 $U_0^{\;-}(x_0;h)=U^-(x_0;h)\setminus\{x_0\}$。

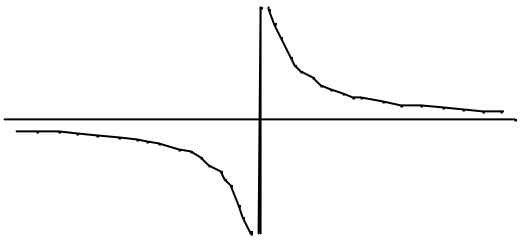


定义 设 $f(x)$ 在 $U^+(x_0;h)$ 上定义，$\forall e>0$，$\exists d>0$，使得当$0<x-x_0<d$时，有 $|f(x)-A|<e$，

则称 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$**，也记** $A = f(x_0+0)$**，称为右极限。**

类似地可定义左极限。

例 $\lim\limits_{x \to 0+0} arctg\dfrac{1}{x} = \dfrac{p}{2}$ $\lim\limits_{x \to n+0}[x] = n$**，** $\lim\limits_{x \to n-0}[x] = n-1$



对单侧极限，5 **定理，即唯一性，局部有界性，四则运算，极限不等式，两边夹仍成立，我们把** 5 **定理的表述和证明都留给同学们做练习。**

定理 1　函数在 x_0 **点极限存在充要条件： 函数在点** x_0 **左右极限都存在且相等。**

证　必要性，$\forall e > 0$，**由** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\exists d > 0$，**使得当** $0 < |x - x_0| < d$ **时，有** $|f(x) - A| < e$**，特别地当** $0 < x - x_0 < d$ **时，有** $|f(x) - A| < e$**，故** $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$。

同理当 $0 < x_0 - x < d$ **时，也有** $|f(x) - A| < e$，**故** $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$。

充分性，$\forall e > 0$，**由** $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$**，**$\exists d_1 > 0$，**使得当** $0 < x - x_0 < d_1$ **时，有** $|f(x) - A| < e$，**又由** $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$，$\exists d_2 > 0$，**使得当** $0 < x_0 - x < d_2$ **时，有** $|f(x) - A| < e$．**令** $d = \min(d_1, d_2)$，**当** $0 < |x - x_0| < d$ **时，有** $|f(x) - A| < e$ **，故** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。

2. 自变量趋向无穷大的情况

称集合 $\{x \mid |x| > h\}$ **为** ∞ **的邻域，记作** $U(\infty; h)$ **或** $U(\infty)$**，称** $\{x \mid h < x < +\infty\}$ **与** $\{x \mid -\infty < x < -h\}$ **为** ∞ **的单侧邻域，记作** $U^+(\infty; h)$ **（** $U^+(\infty)$ **或** $U(+\infty)$**），**$U^-(\infty; h)$ **（**$U^-(\infty)$ **或** $U(-\infty)$**）。**

定义 2　设 $f(x)$ **在** $U^+(\infty)$ **上定义，**$\forall e > 0$，$\exists X \in U^+(\infty)$，**使得当** $x > X$ **时有** $|f(x) - A| < e$**，则** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$。

类似地可定义

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

对这种极限，5 定理也成立，我们还是把它们的表述和证明留给同学们做练习。

3．广义极限

定义　**设** $f(x)$ **在** $U_0(x_0)$ **定义，** $\forall M>0$ **，** $\exists d>0$ **，使得当** $0<|x-x_0|<d$ **时，有** $f(x)>M$ **，则** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$**。**

类似地可以定义

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty\text{，}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\quad\text{，}$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty\text{，}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\text{，}$$

Λ .

对于序列 $\{x_n\}$ **，也可以定义** $x_n\to+\infty,-\infty,\infty$**。**

练习：完成下表中极限和广义极限定义。

$f(x)$ \ x	$x\to x_0$	$x\to x_0+0$	$x\to x_0-0$	$x\to+\infty$
$f(x)\to A$				
$f(x)\to+\infty$				
$f(x)\to-\infty$				
$f(x)\to\infty$				
	$x\to-\infty$	$x\to\infty$	$n\to\infty$	
$f(x)\to A$				
$f(x)\to+\infty$				
$f(x)\to-\infty$				
$f(x)\to\infty$				

注　**表中第一行表明极限存在，关于极限性质的 5 定理都存在；第二，三，四行极限不存在！关于极限性质的 5 定理不一定成立，就是成立也要改变形式。不成立的如** $(+\infty)-(+\infty)$ **，** $0\cdot\infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ **称为不定式，需要我们建立更精细的理论来研究它们，后面第四章的洛比塔法则就是针对不定式的。在广义极限中唯一性还成立，局部有界性显然不成立，但可代替它有局部下有界或上有界，四则运算成立的有** $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ ，

$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$ ，$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$，$(+\infty)\pm a=+\infty$，$(+\infty)\cdot a=+\infty \quad (a>0)$ 。

无穷小量 **极限为零的变量称为无穷小量，即**

$$x_n \to 0 \quad (n\to+\infty),$$

$$f(x)\to 0 \quad (x\to x_0, x_0+0, +\infty, -\infty, \infty)$$

无穷大量 **极限为无穷**$(+\infty, -\infty, \infty)$**的变量称为无穷大量，即**

$$x_n \to \pm\infty, \infty \quad (n\to+\infty)$$

$$f(x)\to\pm\infty \quad (x\to x_0, x_0\pm 0, \pm\infty, \infty)$$

它们有关系 $\dfrac{1}{\text{无穷大量}}=$**无穷小量，如果变量不取零值。**

命题 1) **无穷小量的绝对值仍为无穷小量，**

2) **无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量，**

3) **变量有极限** a **充要条件是它可分解成** a **与无穷小量之和：**

$f(x)=a+(f(x)-a)$。

4. 复合函数求极限

例 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$。

解 **令**$\sqrt[3]{1+x}=t$**，则**$x\to0$**时**$t\to1$**，**

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to1}\frac{t-1}{t^3-1}=\lim_{t\to1}\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{3}。$$

这样一个变量替换$t=\sqrt[3]{1+x}$ **把这个极限变得简单易求，一般的理论根据来源如下：**

定理 **设** $f(t)$ **在**$U_0(t_0)$**上定义，且** $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=A$**，** $t=g(x)$ **在**$U_0(x_0)$**上定义，当** $x\in U_0(x_0)$**时，** $t=g(x)\in U_0(t_0)$**，** **且** $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=t_0$**，则** $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=A$。

证 $\forall e>0$**，由**$\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=A$**，**$\exists h>0$ **，使得当**$0<|t-t_0|<h$ **时 ，有**

$$|f(t)-A|<e$$

对这个$h>0$**，由** $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=t_0$**，**$\exists d>0$**，使得当**$0<|x-x_0|<d$ **时，有**

$$|g(x)-t_0|<h$$

根据$x \in U_0(x_0)$时$g(x) = t \in U_0(t_0)$，所以

$$0 < |g(x) - t_0| = |t - t_0| < h\text{，}$$

这样我们有

$$|f[g(x)] - A| = |f(t) - A| < e\text{，}$$

即 $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = A$。

§2.7 极限存在性理论及两个重要极限

1．极限存在性

E 无上界，规定$\sup E = +\infty$，

E 无下界，规定$\inf\ E = -\infty$。

定理 设$f(x)$在$U_0^-(x_0)$上定义，且$f(x)$单调上升，则 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ 存在且等于 $\sup\limits_{x \in U_0^-(x_0)} f(x)$。

证 令$A = \sup\limits_{x \in U_0^-(x_0)} f(x)$，当集合 $\{f(x) \mid x \in U_0^-(x_0)\}$有上界时，$A < +\infty$，当它无上界时，$A = +\infty$．

1) $A < +\infty$

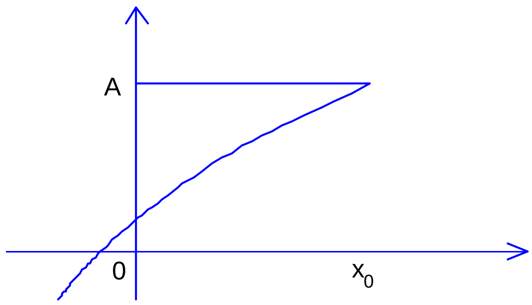
$\forall e > 0$，由上确界定义，$\exists x' \in U_0^-(x_0)$，使得$f(x') > A - e$，取$d = x_0 - x' > 0$，

则当$0 < x_0 - x < d$ 时，由函数单调上升得

$f(x) \geq f(x') > A - e$，再由上确界定义

$A + e > f(x) > A - e$，或 $|f(x) - A| < e$，

即 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A = \sup\limits_{x \in U_0^-(x_0)} f(x)$。



2) $A = +\infty$

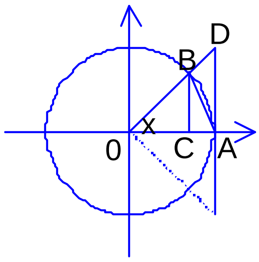
因集合无上界，对$\forall M > 0$，$\exists x' \in U_0^-(x_0)$，使得$f(x') > M$。取 $d = x_0 - x' > 0$，

则当$0 < x_0 - x < d$ 时，有 $f(x) \geq f(x') > M$，即 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty = \sup\limits_{x \in U_0^-(x_0)} f(x)$．

类似地我们有：$f(x)$在$U_0^-(x_0)$定义，且$f(x)$单调下降，则 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \inf\limits_{x \in U_0^-(x_0)} f(x)$，以及关于右极限的相应结果，同学们自行给出定理的表述和证明。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

在单位圆盘 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上，x 是圆心角 $\angle AOB$，以弧度计，即它恰好等于 $\overset{\frown}{AB}$，而 $\sin x=\overline{BC}$ 是弦长 $\overline{BB'}$ 之半，它的几何意义是



$$\frac{\sin x}{x}=\frac{2\sin x}{2x}=\frac{\overline{BB'}}{\overset{\frown}{BB'}}\to 1\quad (x\to 0)$$

即圆心角趋于 0 时，对应的弦长与弧长之比趋于 1。

证 设 $0<x<\frac{p}{2}$，ΔAOB 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ $\Delta\, AOD$ 面积，即

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx\,,\qquad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1\,,$$

用偶函数性质，这不等式在 $-\frac{p}{2}<x<0$ 时也成立。

令 $x\to 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，两边夹得出 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。

推论 $\forall x\in\mathbf{R}$，$|\sin x|\le|x|$，等号成立当且仅当 $x=0$。

证 $0<|x|<\frac{p}{2}$ 时，$\frac{\sin x}{x}=\frac{|\sin x|}{|x|}<1$，当 $|x|\ge\frac{p}{2}$ 显然成立，而 $x=0$ 时等号成立，且只有 $x=0$ 时等号成立。

用 Mathematica 作函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $\{x,-p,p\}$ 的图形，可以看出在原点附近，它非常近似于直线。

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

证 先证 $x\to+\infty$ 情况，当 $x>1$ 时，有

$$1+\frac{1}{[x]+1}\le 1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{[x]}\,.$$

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^x\le(1+\frac{1}{x})^x\le(1+\frac{1}{[x]})^x$$

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} \le (1+\frac{1}{x})^{x} \le (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$e \qquad\qquad\qquad\qquad e$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$。

再证 $x\to-\infty$ 情况，令 $x=-y,\ y\to+\infty$，

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y}=\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}\cdot(1+\frac{1}{y-1})=e$$

由极限与单侧极限关系定理，得 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$。

推论 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$。

证 令 $t=\frac{1}{x}$，即得。

§2.8 序列极限与函数极限之关系

1. 极限不存在的定义

回顾 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \quad (-\infty<a<+\infty)$ 的定义：$\forall e>0$，$\exists M\in\mathbf{N}$，使得当 $n>M$ 时，有 $|x_n-a|<e$.

否命题定义中注意以下逻辑符号的互换：

$$\boxed{\begin{array}{l}\exists\longleftrightarrow\forall\\ \le\longleftrightarrow>\end{array}}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$ 不以 a 为极限的定义：$\exists e_0>0$，$\forall k\in\mathbf{N}$，$\exists n_k>k$，使得 $|x_{n_k}-a|\ge e_0$。

回想 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义：$f(x)$ 定义于 $U_0(x_0)$ 上，$\forall e>0$，$\exists d>0$，使得当 $0<|x-x_0|<d$ 时，有 $|f(x)-A|<e$。

当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不以 A 为极限的定义：$f(x)$ 定义于 $U_0(x_0)$ 上，$\exists e_0>0$，$\forall d>0$，$\exists x_d: 0<|x_d-x_0|<d$，使得 $|f(x_d)-A|\ge e_0$。

回想 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ **的定义：** $f(x)$ **定义于** $U(\infty)$ **上，** $\forall A>0$ **，** $\exists M>0$ **，使得当** $|x|>M$ **时，有** $f(x)>A$ **。**

当 $x\to\infty$ **时，** $f(x)$ **不以** $+\infty$ **为广义极限的定义：** $f(x)$ **定义于** $U(\infty)$ **上，** $\exists A_0>0$ **，** $\forall X>0$ **，** $\exists x_X\in U(\infty)$ **且** $|x_X|>X$ **，使得** $f(x_X)\le A_0$ **。**

在反证法的证明中经常需要这种否命题的叙述，下面的定理证明是一个例子：

2　列极限和函数极限之关系

定理　**设** $f(x)$ **在** $U_0(x_0)$ **上定义，则** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ **成立的充要条件是：对于** $U_0(x_0)$ **内任一序列** $\{x_n\}$ **，若** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ **，都有** $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ **。**

证　**必要性**　**在** $U_0(x_0)$ **中任取序列** $\{x_n\}$ **，且** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ **，要证** $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ **。** $\forall e>0$ **，由** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ **，** $\exists d>0$ **，使得当** $0<|x-x_0|<d$ **时，有** $|f(x)-A|<e$ **。对于** $d>0$ **，由** $x_n\to x_0$ **，** $\exists N$ **，使得当** $n>N$ **时，有** $0<|x_n-x_0|<d$ **，于是当** $n>N$ **时，有** $|f(x_n)-A|<e$ **，即** $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ **。**

充分性　**，如果不然，即** $x\to x_0$ **时，** $f(x)$ **不以** A **为极限，则** $\exists e_0>0$ **，** $\forall d>0$ **，** $\exists x_d\in U_0(x_0)$　$0<|x_d-x_0|<d$ **，使得** $|f(x_d)-A|\ge e_0$ **。**

令 $d=\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,\Lambda)$ **，则** $\exists x_n\in U_0(x_0)$ **，** $0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$ **，使得** $|f(x_n)-A|\ge e_0$ **。对于序列** $\{x_n\}$ **，** $x_n\to x_0$ **，** $x_n\in U_0(x_0)$ **，但** $|f(x_n)-A|\ge e_0$ **，显然与条件** $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ **矛盾。**

判断 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **不存在之方法：在** $U_0(x_0)$ **中找到两个序列** $\{x_n'\}$ **和** $\{x_n''\}$ **都趋向于** x_0 **，两个极限** $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ **和** $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$ **都存在，但不相等，这实际上是充要条件，充分性的证明用本节定理就行了，必要性的证明要到第三册讲完紧性以后才能证，我们目前也只用到它的充分性。**

例　**证明** $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ **不存在。**

证　**令** $x_n'=\dfrac{1}{2pn}\to 0$ **，** $x_n''=\dfrac{1}{(2n+\frac{1}{2})p}\to 0$ **，** $\sin\dfrac{1}{x_n'}=0$ **，当然趋于** 0 **，**

$\sin\frac{1}{x_n''}=1$， 当然趋于1，故$\sin\frac{1}{x}$当$x\to 0$ 时没极限。

习题：

2.1 用$e-N$ 方法验证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2-1}=0$，并对$e=0.1$，$0.01$求出相应的$N$.

2.2 用$e-N$ 方法验证下列极限为零.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+n}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4-n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n-3}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{10^n}{n!}$;　　(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}$;

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}\quad(a>1)$;　　(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}[\ln(n+1)-\ln n]$.

2.3 若$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，求证$\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n|=|a|$.

2.4 设$x_n>0\ (n=1,2,\Lambda)$，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

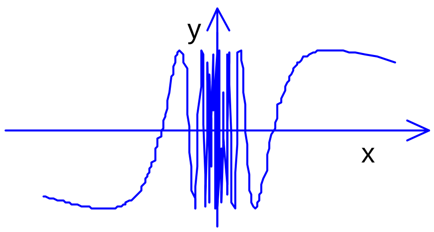
2.5 设$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，$l$为确定的自然数，求证$\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+l}=a$. 反之成立吗？

2.6 （1） 求证$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$的充要条件为：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n+1}=a$.

(2) 已知$\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n+1}$都存在，是否能保证$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$存在.

2.7 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，求证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{a}$.

2.8 设



$x_n \le a \le y_n \ (n = 1, 2, \Lambda)$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$. 求证：

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$， $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.

2.9 **求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\Lambda\ \frac{n}{n^2})$； (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{1+a+\Lambda\ +a^{n-1}} \quad (a>0)$；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\Lambda\ +\frac{1}{n(n+1)})$；

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$； (5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} \quad (0<a<1)$；

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n} \quad (a>1, k>0)$.

2.10 **设** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$， $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. **求证：**

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\max(x_n, y_n) = \max(a, b)$；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\min(x_n, y_n) = \min(a, b)$.

2.11 **求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{\sqrt[3]{1+n^2}}$； (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n\cdot\ln n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\Lambda\ (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\Lambda\ (2n)}}$； (4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\Lambda\ (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\Lambda\ (2n)}$；

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

2.12 **求下列集合的上、 下确界：**

(1) $E=\left\{[1+(-1)^n]\frac{n+1}{n} \mid n\text{为正整数}\right\}$；

(2) $E=\left\{\frac{m}{n} \mid 0<m<n,\ \ m, n\text{为正整数}\right\}$;

(3) $E=\left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2np}{3} \mid n\text{为正整数}\right\}$;

(4) $E=\left\{\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}} \mid n\text{为正整数}\right\}$;

（5） $E=\{x-[x]\mid x$**为实数**$\}$.

2.13 **设** $f(x)$，$g(x)$ **在** D **上定义，且** $f(x)\le g(x)$，$\forall x\in D$. **求证：**

（1） $\sup\limits_{x\in D} f(x)\le \sup\limits_{x\in D} g(x)$；

（2） $\inf\limits_{x\in D} f(x)\le \inf\limits_{x\in D} g(x)$.

2.14 **求下列序列的极限：**

（1） $\sqrt{2}$，$\sqrt{2\sqrt{2}}$，$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\Lambda$；

（2） $\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\Lambda$.

2.15 **利用单调有界有极限定理，求证** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

2.16 **设** $0<a_1<b_1$，**令** $a_{n+1}=\sqrt{a_n\cdot b_n}$，$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$， $n=1,2,\Lambda$.

求证 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ **极限存在且相等**.

2.17 **设** $\{a_n\}$ **单调下降，且** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$，**令** $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\Lambda+a_n}{n}$. **求证：**

（1） $\{b_n\}$ **单调下降；**

（2） $b_{2n}\le\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$；

（3） $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$.

2.18 **用** $e-d$ **方法验证下列各题：**

（1） $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$；　　（2） $\lim\limits_{x\to a}x^2=a^2$；

（3） $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\quad(a>0)$；　　（4） $\lim\limits_{x\to a}x^3=a^3$；

（5） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}\quad(a\ne 0)$.

2.19 **设** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，**用** $e-d$ **方法证明下列各题：**

（1） $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$；　　（2） $\lim\limits_{x\to a}f^2(x)=A^2$；

（3） $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}\quad(A>0)$；　　（4） $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}$；

（5） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}=\dfrac{1}{\sqrt{A}}\quad(A>0)$.

2.20 **求下列极限：**

（1） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$； （2） $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-4x+8}$；

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$； （4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$.

2.21 **求下列极限：**

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x)$； （2） $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

2.22 **求下列极限：**

（1） $\lim\limits_{x\to 0+0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$； （2） $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{[x]^2-4}{x^2-4}$；

（3） $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{[x]^2-4}{x^2-4}$； （4） $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{[4x]}{1+x}$.

2.23 **用变量替换求下列极限：**

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}\quad(a>0)$； （2） $\lim\limits_{x\to 0+0}x^a\ln x\quad(a>0)$；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$； （4） $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x$.

2.24 **设** $f(x)$ **在集合** X **上定义，则** $f(x)$ **在** X **上无界的充要条件是：** $\exists x_n\in X$，$n=1,\ 2,\ \Lambda$ ，**使** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x_n)=+\infty$.

2.25 **设** $f(x)$ **在** $(a,+\infty)$ **上单调上升，** $\lim\limits_{x\to+\infty}x_n=+\infty$，**若** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x_n)=A$，**求证：** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ （A **可以为无穷**）.

2.26 **设** $f(x)$ **是** $(-\infty,+\infty)$ **上的周期函数，又** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，**求证：** $f(x)\equiv 0$.

2.27 **求下列极限：**

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tg5x}$； （2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$；

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$； （4） $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ （m，n **为整数**）；

（5） $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}\dfrac{tgx-1}{x-\frac{p}{4}}$； （6） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(n\arccos x)}{x}$ （n **为奇数**）；

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}[\cos\sqrt{n+1}-\cos\sqrt{n}]$； (8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(p\sqrt{n^2+1})$.

2.28 **求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{-x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$； (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x}\right)^{x^2}$ $(a\neq 0)$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}(\sin x)^{tgx}$； (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$；

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$； (8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+\ln n}{n-\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}$.

2.29 **用肯定语气叙述** $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\neq+\infty$.

2.30 **用肯定语气叙述** $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ **不存在**.

2.31 **证明下列极限不存在：**

(1) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2np}{3}$；

(2) $x_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$；

(3) $x_n=\sin(p\sqrt{n^2+n})$.