第二章 n 维欧氏空间

§1.1 $\mathbf{R}^n$ 的极限理论

在线性代数中我们学习了 n 维向量空间 $\mathbf{V}_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \cdots, n\}$. 我们在 $\mathbf{V}_n$ 中定义了加法和数乘. 特别的我们还定义了 $\mathbf{V}_n$ 中的内积 $(\ ,\ )$.

设 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ 是 $\mathbf{V}_n$ 中的向量. 定义 x 与 y 的内积 (x, y) 为

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n .$$

内积 (x, y) 满足:

1. 对称性: $(x, y) = (y, x)$;

2. 线性性: $(ax_1 + bx_2, y) = a(x_1, y) + b(x_2, y)$;

3. 正定性: $\forall x \in \mathbf{V}_n, (x, x) \geq 0$, 并且 $(x, x) = 0$ 等价于 $x = 0$.

利用内积我们可以定义 $\mathbf{V}_n$ 中向量的长度为 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

将 $P_1 = (x_1, \cdots, x_n), P_2 = (y_1, \cdots, y_n)$ 看作 $\mathbf{V}_n$ 中的点, 我们定义其距离 $d(P_1, P_2)$ 为

$$d(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\| = \sqrt{(P_1 - P_2, P_1 - P_2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} .$$

引理 1: $d(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\|$ 满足

1. 对称性: $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$;

2. 正定性: $d(P_1, P_2) \geq 0$, $\quad d(P_1, P_2) = 0$ 等价于 $P_1 = P_2$;

3. 三角不等式: $\forall P_1, P_2, P_3 \in \mathbf{V}_n$, 恒有

$$d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2). \qquad (\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|).$$

并且等式成立的充分必要条件是 P_1, P_2, P_3 在同一直线上.

证明: 1 和 2 显然, 仅证明 3.

设 $V_1, V_2 \in \mathbf{V}_n$, 则对任意 $t \in \mathbf{R}$, 恒有

$$(V_1 - tV_2, V_1 - tV_2) = (V_1, V_1) - 2t(V_1, V_2) + t^2(V_2, V_2) \geq 0.$$

因此 t 的二次函数的判别式 $4(V_1, V_2)^2 - 4(V_1, V_1)(V_2, V_2) \leq 0$. 我们得到 Cauchy 不等式

$$(V_1, V_2)^2 \leq (V_1, V_1)(V_2, V_2).$$

并且其中等式成立的充要条件是 V_1, V_2 线性相关. 对任意 $P_1, P_2, P_3 \in \mathbf{V}_n$, 令 $V_1 = P_1 - P_3, V_2 = P_2 - P_3$, 则

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2)^2 &= (V_1 - V_2, V_1 - V_2) = (V_1, V_1) - 2(V_1, V_2) + (V_2, V_2) \\ &\leq (V_1, V_1) + 2\sqrt{(V_1, V_1)(V_2, V_2)} + (V_2, V_2) \\ &= \left(\sqrt{(V_1, V_1)} + \sqrt{(V_2, V_2)}\right)^2 = \left(d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2)\right)^2. \end{aligned}$$

得三角不等式. 等式成立当且仅当存在 t 使 $V_1 = tV_2$, 即 P_1, P_2, P_3 在同一直线上.

$d(P, Q) = \|P - Q\|$ 称为 $\mathbf{V}_n$ 的欧氏度量. $\mathbf{V}_n$ 在定义了欧氏度量后称为 n 维欧氏空间, 通常以 $\mathbf{R}^n$ 记之. 我们希望利用欧氏度量 $d(P, Q)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上建立极限理论, 并进一步将一个变元的微积分推广到多个变元的函数上.

定义: 设 $\{P_m\}_{m=1,2,\cdots}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个点列, 称 $m \to +\infty$ 时 $P_m \to P_0 \in \mathbf{R}^n$, 如果 $\forall e > 0, \exists N$, 使得只要 $m > N$, 就有 $d(P_m, P_0) < e$, 记为 $\lim\limits_{m \to +\infty} P_m = P_0$. $\{P_m\}$ 称为收敛序列.

与 $\mathbf{R}$ 中极限相同, 我们也可以用邻域的语言描述极限. 设 $P \in \mathbf{R}^n$, 对任意 $e > 0$, 我们定义 $B(P, e) = \left\{Q \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, d(P, Q) < e\right\}$, $B(P, e)$ 称为半径为 e 的 P 的球形邻域. 称

$$B_0(P, e) = B(P, e) - \{P\} = \left\{Q \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, 0 < d(P, Q) < e\right\}$$

为 P 的空心 e-球形邻域.

设 $P = (x_1^0, \cdots, x_n^0), e = (e_1, \cdots, e_n)$ 满足 $e_i > 0$, 定义

$$S(P, e) = \left\{Q = (x_1, \cdots, x_n) \,\middle|\, |x_i - x_i^0| < e_i, i = 1, \cdots, n\right\}.$$

$S(P, e)$ 称为 P 的长方形 e-邻域. $S_0(P, e) = S(P, e) - \{P\}$ 为长方形的空心 e-邻域.

引理 2: 对任意 $e' > 0$, 存在 $\tilde{e} = (e_1, \cdots, e_n) > 0$ 和 e'', 使得

$$B(P, e') \supset S(P, \tilde{e}) \supset B(P, e'').$$

利用 e-邻域，$P_m \to P_0$ 可表示为对 P_0 的任意 e-邻域 $U(P_0,e), \exists N$，只要 $m > N$，就有 $P_m \in U(P_0,e)$.

如果将 P_m 用坐标表示为 $P_m = (x_1^m, \cdots, x_n^m)$，则上面长方形 e-邻域的极限描述等价于

引理 3: 设 $P_m = (x_1^m, \cdots, x_n^m)$, $P_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$，则 $\lim\limits_{m\to+\infty} P_m = P_0$ 的充分必要条件是对 $i = 1, \cdots, n$ 都有 $\lim\limits_{m\to+\infty} x_i^m = x_i^0$.

即序列 P_m 收敛于 P_0 等价于 P_m 的每一个分量收敛于 P_0 对应的分量.

利用不等式

$$\begin{aligned}\max_{1\le i\le n}\left\{\left|x_i^m - x_i^0\right|\right\} &\le \left\|P_m - P_0\right\| = \sqrt{(x_1^m - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n^m - x_n^0)^2} \\ &\le \left|x_1^m - x_1^0\right| + \cdots + \left|x_n^m - x_n^0\right|,\end{aligned}$$

也可直接得到上面引理. 下面讨论中我们将以 $B(P,e)$ 为例，其结论对 $S(P,e)$ 也成立.

设 $S \subset \mathbf{R}^n$ 是任意给定的集合. 利用 e-邻域，我们可以将 $\mathbf{R}^n$ 中所有的点相对于 S 进行分类.

内点: $P \in \mathbf{R}^n$ 称为 S 的内点，如果存在 $e > 0$，使 $B(P,e) \subset S$. 以 S° 记 S 的所有内点.

外点: $P \in \mathbf{R}^n$ 称为 S 的外点，如果存在 $e > 0$，使得 P 的 e-邻域 $B(P,e) \subset \mathbf{R}^n - S$.

边界点: 如果 $P \in \mathbf{R}^n$ 既不是 S 的内点，也不是 S 的外点，则 P 称为 S 的边界点.

以 ∂S 记集合 S 的所有边界点，则不难看出 $\partial S = \mathbf{R}^n - \left(S^\circ \bigcup (\mathbf{R}^n - S)^\circ\right)$. 或表示为 $P \in \mathbf{R}^n$ 为 S 的边界点，如果 $\forall e > 0$，恒有 $B(P,e) \bigcap S \neq \varnothing$，$B(P,e) \bigcap (\mathbf{R}^n - S) \neq \varnothing$.

边界点可进一步分类.

孤立点: $P \in \mathbf{R}^n$ 称为 S 的孤立点，如果存在 $e > 0$，使得 $B(P,e) \bigcap S = \{P\}$.

显然孤立点都是边界点.

极限点: $P \in \mathbf{R}^n$ 为 S 的极限点，如果 $\forall e > 0, B_0(P,e) \bigcap S \neq \varnothing$.

容易看出，P 为 S 的极限点等价于存在序列 $\{P_m\} \subset S - \{P\}$，满足 $\lim\limits_{m\to+\infty} P_m = P_0$. 显然内点都是 S 的极限点. 而 $P \in \partial S$ 如果不是 S 的孤立点，则必是 S 的极限点.

集合 S 称为开集，如果 S 的所有点都是 S 的内点，即 S 为开集 $\Longleftrightarrow S = S^\circ$.

如果 $S=\varnothing$，则 $S^\circ=\varnothing$，因此 $S=S^\circ$，所以空集是开集.

容易看出开集满足: 有限个开集的交是开集; 任意多个开集的并也是开集.

集合 S 称为闭集, 如果 $\mathbf{R}^n-S$ 为开集.

由于空集是开集, 因此 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^n-\varnothing$ 是闭集. 而 $\mathbf{R}^n$ 显然是开集, 所以 $\varnothing=\mathbf{R}^n-\mathbf{R}^n$ 是闭集.

思考题: 证明 $\mathbf{R}^n$ 和空集 $\varnothing$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中唯一的两个既开又闭的集.

由闭集定义不难得到: 任意多个闭集的交是闭集, 有限个闭集的并也是闭集.

对于任意集合 S，令 $\overline{S}$ 为所有包含 S 的闭集的交. $\overline{S}$ 是包含 S 的最小闭集, 称为 S 的闭包.

引理 4: S 是闭集的充分必要条件是下面假设中有一个成立:

a) $S=\overline{S}$;

b) $S=S^\circ\bigcup\partial S$;

c)如果 P 是 S 的极限点, 则 $P\in S$.

证明留给读者.

称集合 $S\subset\mathbf{R}^n$ 是道路连通的, 如果对 S 中任意两点 P,Q，都存在 $\mathbf{R}^n$ 中的一条连续曲线 $r(t):t\to\left(x_1(t),\cdots,x_n(t)\right),\ t\in[0,1]$，其中 $x_i(t)$ 连续, 使得 $r(0)=P,r(1)=Q$，且 $\forall t\in[0,1],\ r(t)\in S$.

$\mathbf{R}^n$ 中连通的开集称为区域, 我们一般用 D 表示. 区域的闭包 $\overline{D}$ 称为闭区域.

§1.2 $\mathbf{R}^n$ 的完备性

一元微积分的极限理论是建立在实数完备的基础上. 利用实数的完备性, 我们才有可能有好的极限, 并在此基础上建立微积分的其它理论.

对于 $\mathbf{R}^n$，我们同样需要将其极限建立在 $\mathbf{R}^n$ 的完备性上. 与 $\mathbf{R}$ 不同的是, 当 $n\ge 2$ 时 $\mathbf{R}^n$ 的点并无大小顺序, 因此确界原理和单调有界序列有极限这两个定理不能推广到 $\mathbf{R}^n$ 上. 但与之等价的关于实数完备性的其它定理在 $\mathbf{R}^n$ 上都是成立的. 下面我们将以平面 $\mathbf{R}^2$ 为例, 表述和证明这些定理, 其相应结论对所有 $\mathbf{R}^n$ 都成立.

序列$\{P_m\}$称为有界序列，如果存在M使得$\forall m$，恒有$\|P_m\| \le M$.

定理 1(波尔察诺)：如果$\{P_m\}$是$\mathbf{R}^2$中的有界序列，则$\{P_m\}$中有收敛子列.

证明：设$P_m = (x_m, y_m)$，$\{P_m\}$有界，则序列$\{x_m\}$和$\{y_m\}$都是$\mathbf{R}$中有界序列．因此$\{x_m\}$中有收敛子列$\{x_{m_k}\}$，而对应的序列$\{y_{m_k}\}$也有收敛子列$\{y_{m_{kl}}\}$，得序列$\{P_{m_{kl}} = (x_{m_{kl}}, y_{m_{kl}})\}$收敛.

序列$\{P_m\}$称为 Cauchy 列，如果$\forall e > 0, \exists N$，只要$n > N, m > N$，就有$\|P_n - P_m\| < e$.

定理 2(Cauchy 准则)：序列$\{P_m\}$收敛的充分必要条件是$\{P_m\}$为 Cauchy 列.

证明：设$\lim\limits_{m\to+\infty} P_m = P_0$，则$\forall e > 0, \exists N$，只要$m > N$，就有$\|P_m - P_0\| < \dfrac{e}{2}$．因此$n > N, m > N$时，由三角不等式得$\|P_n - P_m\| \le \|P_n - P_0\| + \|P_m - P_0\| < e$，得$\{P_m\}$是 Cauchy 列.

反之，设$\{P_m\}$是 Cauchy 列．取$e = 1$，则$\exists N$，使$n > N$时$\|P_{N+1} - P_n\| < 1$．因此$\|P_n\| \le \|P_{N+1}\| + \|P_{N+1} - P_n\| < \|P_{N+1}\| + 1$．而$\{P_1, \cdots, P_N\}$显然有界，得$\{P_m\}$是有界列．由波尔察诺定理，$\{P_m\}$中有收敛子列$P_{m_k} \to P_0$．$\forall e > 0$，由$\{P_m\}$是 Cauchy 列，得$\exists N_1$，使$n > N_1, m > N_1$时，$\|P_n - P_m\| < \dfrac{e}{2}$．而由$P_{n_k} \to P_0$得存在$N_2$，使$n_k > N_2$时，$\|P_{n_k} - P_0\| < \dfrac{e}{2}$．令$N = \max\{N_1, N_2\}$，取定一$m_k > N$，则对任意$m > N$，$\|P_m - P_0\| \le \|P_m - P_{m_k}\| + \|P_{m_k} - P_0\| < e$，即$\lim\limits_{m\to+\infty} P_m = P_0$.

定义：设$S \subset \mathbf{R}^2$，令$d(S) = \sup\{\|P - Q\| \mid P, Q \in S\}$，$d(S)$称为集合$S$的直径．对$\mathbf{R}^2$中任意集合$S_1, S_2$，定义$d(S_1, S_2) = \inf\{\|P - Q\| \mid P \in S_1, Q \in S_2\}$，$d(S_1, S_2)$称为集合$S_1, S_2$的距离.

定理 3(区间套原理)：设$\{F_n\}$是$\mathbf{R}^2$中一列闭集，满足

1. $\forall n, F_n \ne \varnothing$;

2. $F_{n+1} \subset F_n$;

3. $d(F_n) \to 0$.

则存在唯一的一个点 P，**使得** $\{P\} \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$.

证明： $F_n \neq \varnothing$，**可取一点** $P_n \in F_n$，**得一序列** $\{P_n\}$. **由** $\lim_{n\to+\infty} d(F_n) = 0$，**得** $\forall e > 0, \exists N$，**只要** $n > N$，**就有** $d(F_n) < e$. **因此** $n > N, m > N$ **时，设** $m \geq n$，**则由** $F_m \subset F_n$，**得** $P_m \in F_n$. $\|P_m - P_n\| \leq d(F_n) < e$. $\{P_n\}$**是一 Cauchy 列. 由 Cauchy 准则，得** $\{P_n\}$**收敛于某一点** P_0. **而对任意** F_m，**由** $n > m$ **后** $P_n \in F_m$，**如果** $P_0 \notin F_m$，**则** P_0 **是** F_m **的极限点. 而** F_m **是闭集，包含其所有极限点，所以必须** $P_0 \in F_m$，**即** $P_0 \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$. **唯一性显然.**

上面定理中我们用有界闭集代替了 R 中闭区间，同样的结果对开复盖定理也成立.

定义：设 $S \subset \mathbf{R}^2$，**集合** $U = \{U_a\}_{a\in A}$ **称为** S **的开复盖，如果对每一个** $a \in A$，U_a **是** $\mathbf{R}^2$ **中开集，而且** $S \subset \bigcup_{a\in A} U_a$. S **称为紧集，如果对** S **的任意开复盖** $\{U_a\}_{a\in A}$，**都可选出有限个元素** $\{U_{a_1}, \cdots, U_{a_k}\}$，**使其亦构成** S **的开复盖.**

定理 4(开复盖定理)： $\mathbf{R}^2$ **中有界闭集是紧集.**

证明：用反证法. 设 F **是** $\mathbf{R}^2$ **中有界闭集，** $U = \{U_a \mid a \in A\}$**是** F **的一个开复盖，且** U **中不存在有限个元素复盖** F.

F **有界，可设** F **包含在一个闭正方形** D_1 **中. 将** D_1 **四等分，得四个小的闭正方形，其中必有一个与** F **的交不能被** U **有限复盖，记之为** D_2. **以此类推，则我们得一列闭正方形** $\{D_n\}$，**使** $D_{n+1} \subset D_n$，$d(D_{n+1}) = \frac{1}{2} d(D_n)$. **而** $D_n \cap F$ **不能被** U **中元素有限复盖. 但** $\{D_n \cap F\}$**是满足区间套原理的一列闭集，因此存在一点** P_0，**使** $\{P_0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (D_n \cap F)$. **特别的，** $P_0 \in F$. **而** U **是** F **的开复盖，存在** $U_a \in U$，**使** $P_0 \in U_a$. **但** U_a **是开集，知存在** $e > 0$，**使** $B(P_0, e) \subset U_a$，**而** $d(D_n \cap F) \to 0$，**因此** n **充分大后，总有** $d(D_n \cap F) < e$. **而**

$P_0 \in D_n \bigcap F$，所以 $D_n \bigcap F \subset B(P_0, e) \subset U_a$. 即 U_a 就是 $D_n \bigcap F$ 的复盖，与 $D_n \bigcap F$ 不能被 U 中有限个元素复盖的假设矛盾.

定理 4 的逆亦成立，这里就不证了.

§1.3 多元连续函数的性质

在现实生活中我们常说一个事物的结果受多种因素的影响. 如果将这句话数字化，设事物变量 y 由 n 种因素变量 $x_i, i=1,\cdots,n$ 决定，我们就称这一事件发生在 n 维空间中，其规律由映射 $(x_1,\cdots,x_n) \to y = f(x_1,\cdots,x_n)$ 决定. 我们得到 $\mathbf{R}^n$ 中一个集合上的 n 元函数. 我们希望将一元函数的微积分推广到 n 元函数上. 下面以 $\mathbf{R}^2$ 为例.

设 $S \subset \mathbf{R}^2$，$z = f(x,y): S \to \mathbf{R}$ 是 S 上二元函数. 设 $P_0 = (x_0, y_0)$ 是 S 的一个极限点($P_0 \in S$ 或 $P_0 \notin S$)，称 $P = (x,y) \in S$ 趋于 P_0 时 $f(x,y)$ 趋于 A，如果 $\forall e > 0, \exists d > 0$，只要 $P = (x,y) \in S$ 且 $0 \le \|P - P_0\| < d$，就有 $|f(x,y) - A| < e$，记为 $\lim\limits_{P \to P_0} f(x,y) = A$.

由于 $P \to P_0$ 等价于对 $P = (x,y)$，同时有 $x \to x_0, y \to y_0$，因此 $\lim\limits_{P \to P_0} f(x,y)$ 也表示为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$，称为 x 和 y 的重极限，或称全面极限.

例：令

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

则 P 沿任意直线 $y = kx$ 趋于原点时，$f(x,y)$ 趋于零，因而都存在且相等. 但对 $k \neq 0$，P 沿 $y = kx^2$ 趋于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于 k. 因而重极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ 不存在.

利用 e-邻域，则重极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$ 可表示为对 A 的任意 e-邻域 $U(A,e)$，存在 $P_0 = (x_0, y_0)$ 的 d -空心邻域 $U_0(P_0, d)$，使得 $f(S \bigcap U_0(P_0, d)) \subset U(A, e)$.

定义：设 $f(x,y)$ 是集合 S 上的函数，称 $f(x,y)$ 在点 $P_0 = (x_0, y_0) \in S$ 是连续的，如果对 $f(x_0, y_0)$ 任意 e -邻域 $U(f(x_0, y_0), e)$，存在 P_0 的 d -邻域 $U(P_0, d)$，使得

$f(S\bigcap U(P_0,d))\subset U(f(x_0,y_0),e)$. 称 $f(x,y)$ 在 S 上连续, 如果 $f(x,y)$ 在 S 的每一点 $P\in S$ 都是连续的.

由定义不难看出, 如果 P_0 是 S 的孤立点, 则任意 $f(x,y)$ 在 P_0 都是连续的. 如果 P_0 是 S 的极限点, 则 $f(x,y)$ 在 $P_0=(x_0,y_0)$ 连续的充分必要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

定理 1(Weierstrass 定理): 如果 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中有界闭集 S 上连续函数, 则 $f(x,y)$ 在 S 上有界, 并达到其上下确界.

证明: 令 $M=\sup\{f(x,y)\mid (x,y)\in S\}$, 则存在 S 中的序列 $P_n=(x_n,y_n)$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n)=M$. 由 S 有界, P_n 是有界序列, 因而有收敛子列. 不妨设 $P_n\to P_0=(x_0,y_0)$. S 是闭集, 因而 $P_0\in S$. 但 $f(x,y)$ 在 P_0 连续, 所以必须 $\lim\limits_{P_n\to P_0} f(x_n,y_n)=f(x_0,y_0)$. 而极限是唯一的, 得 $M=f(x_0,y_0)$. $f(x,y)$ 有上界并达到上确界.

定义: 设 $f(x,y)$ 是集合 S 上的函数, 称 $f(x,y)$ 在 S 上一致连续, 如果 $\forall e>0,\exists d>0$, 只要 $P_1=(x_1,y_1)\in S, P_2=(x_2,y_2)\in S$ 且 $\|P_1-P_2\|<d$, 就有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<e$.

与一个变元相同, 如果 $f(x,y)$ 在 S 上一致连续, 则必连续, 但反之并不成立.

定理 2(Cantor 定理): 有界闭集上的连续函数必一致连续.

证明: 证明与一元函数相同.

用反证法. 设 $f(x,y)$ 在 S 上不一致连续, 则存在 $e_0>0$, 使得对任意 $d_n=\dfrac{1}{n}$, 存在 $P_n=(x_n,y_n)\in S$, 和 $Q_n=(x_n',y_n')\in S$, 满足 $\|P_n-Q_n\|<\dfrac{1}{n}$. 但 $|f(x_n,y_n)-f(x_n',y_n')|\ge e_0$, 由 S 有界, 因而 $\{P_n\},\{Q_n\}$ 都是有界序列, 存在收敛子列 $P_{n_k}\to P_0$. 而 S 是闭集, 所以必有 $P_0\in S$. 但

$$\left\|Q_{n_k}-P_0\right\|\le\left\|Q_{n_k}-P_{n_k}\right\|+\left\|P_{n_k}-P_0\right\|\to 0,$$

因而 $Q_{n_k}\to P_0$．而 $f(x,y)$ 在 P_0 连续，因此 $\left|f(x_{n_k},y_{n_k})-f(x'_{n_k},y'_{n_k})\right|\to 0$，与 $\left|f(x_n,y_n)-f(x'_n,y'_n)\right|\ge e_0>0$ 矛盾.

定理 3(介值定理)： 设 $f(x,y)$ 在 S 上连续，且 S 是道路连通的，则对任意 $P\in S, Q\in S$，及 $c\in[f(P), f(Q)]$，存在 $\tilde{Q}\in S$，使得 $f(\tilde{Q})=c$.

证明：S 道路连通，则存在 S 中的连续曲线 $g:t\to(x(t),y(t))$，使得 $g(0)=P, g(1)=Q$，因此 $t\to f(g(t))$ 是 $[0,1]$ 上连续函数．而 $c\in[f(g(0)), f(g(1))]$，由一元连续函数的介值定理，知存在 $t_0\in[0,1]$，使得 $f(g(t_0))=c$．令 $\tilde{Q}=g(t_0)$，则 $f(\tilde{Q})=c$.

容易看出连续函数经加、减、乘、除和复合后仍是连续函数．特别的，我们常用的用一元初等函数经简单运算得到的多元函数都是连续的.

设 $D=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbf{R}^2$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中矩形区域，$f(x,y)$ 是 D 上连续函数．容易看出，固定任意 $x_0\in[a,b]$ 后，$f(x_0,y)$ 是 y 在 $[c,d]$ 上的连续函数．同样对任意 $y_0\in[c,d]$，$f(x,y_0)$ 是 x 在 $[a,b]$ 上的连续函数．但反之并不成立.

例： 令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$f(x,y)$ 对 x 和 y 都是连续的，但 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$ 并不存在．因此作为二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

设 $S\subset\mathbf{R}^n, T\subset\mathbf{R}^m$，映射 $F:S\to T$ 称为向量函数．利用 $\mathbf{R}^n$ 的坐标 $(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $\mathbf{R}^m$ 的坐标 $(y_1,\cdots,y_m)$，则 F 可表示为

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{cases}.$$

其由 m **个在** S **上定义的** n **元函数组成. 利用** e **-邻域, 向量函数的连续性可表示为设** $P \in S$, **称** F **在** P **点连续, 如果** $\forall e > 0, \exists d > 0$, **使得** $F(U(P,d)\bigcap S) \subset U(F(P),e)$. **特别的, 如果我们在定义中用长方形** e **-邻域, 则不难看出, 向量函数**

$$(x_1,\cdots,x_n) \to (f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots, f_m(x_1,\cdots,x_n))$$

连续的充分必要条件是其每一个分量函数 $(x_1,\cdots,x_n) \to f_i(x_1,\cdots,x_n)$ **都是连续的.**

对向量函数我们同样有: 有界闭集上连续的向量函数有界, 并且一致连续.

习题

1. **设** x_n **是** $\mathbf{R}^m$ **中的点列, 若它有极限, 证明:** x_n **有界.**

2. **设** $l \in \mathbf{R}^m, |l| = 1, < l, e_i >= q_i$ **为** l **与坐标向量** $e_i (i = 1,2,\cdots,m)$ **的夹角, 求证:**

$$l = (\cos q_1, \cos q_2, \cdots, \cos q_m).$$

3. **对任意** $x, y \in \mathbf{R}^m$,

    (1) 哥西不等式

$$|(x, y)| \le |x||y|$$

中等号何时成立?

    (2) 三角不等式

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

中等号何时成立?

4. **求下列集合** Ω **的边界** $\partial\Omega$ **, 内部** Ω° **和闭包** $\overline{\Omega}$:

    (1) $\Omega \subset \mathbf{R}^2, \Omega = \{(x, y) \mid 0 < y < x+1, x > -1\}$;

    (2) $\Omega \subset \mathbf{R}^2, \Omega = \{(r\cos q, r\sin q) \mid 0 < r < 1, 0 < q < 2p\}$;

    (3) $\Omega \subset \mathbf{R}^2, \Omega = \{(x, y) \mid x$**或**$y$**是无理数**$\}$;

    (4) $\Omega \subset \mathbf{R}^m, \Omega = \{x \mid x, x_0 \in \mathbf{R}^m, 0 < |x - x_0| \le d\}, d > 0$;

（5） $\Omega\subset\mathbf{R}^m,\ \Omega=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}^m,\ |x|=1\right\}$.

5．**证明**:

（1） $(A\bigcup B)^\circ\supset A^\circ\bigcap B^\circ$ ；　　（2） $\overline{A\bigcap B}\subset\overline{A}\bigcap\overline{B}$ ；

并举例说明等号不成立.

6．**对任意** $E\subset\mathbf{R}^m$，**求证** ∂E **是闭集**.

7．**设** $1\le s\le m-1,\ m>1,\ A\subset\mathbf{R}^s,\ B\subset\mathbf{R}^{m-s}$，**则** $A\times B\subset\mathbf{R}^m$．**证明**:

（1）**若** A,B **是开集**，**则** $A\times B$ **是开集**.

（2）**若** A,B **是闭集**，**则** $A\times B$ **是闭集**.

8．**叙述下列定义**:

（1） $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}}f(x,y)=A$ ；　　（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=+\infty$ ；

（3） $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}f(x,y)=A$ ；　　（4） $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x,y)=A\quad(x\in\mathbf{R}^m)$.

9．**对下列函数** $f(x,y)$，**证明** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ **不存在**:

（1） $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ ；　　（2） $f(x,y)=\dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ ；

（3） $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ ；　　（4） $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$.

（5） $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$.

10．**叙述并证明** $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}f(x,y)$ **存在的哥西收敛准则**.

11．**证明** $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}\left[f(x)+g(y)\right]$ **存在的充要条件是**:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\ \text{与}\ \lim_{y\to-\infty}g(y)\ \text{同时存在}.$$

12．**指出下列函数的本性不连续点**，**并说明理由**:

（1） $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ；　　（2） $\dfrac{x}{x+y}$ ；　　（3） $\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$ ；

（4） $(\sin x\sin y)^{-1}$ ；　　（5） $e^{-\frac{x}{y}}$ ；　　（6） $|x|^{\frac{1}{|y|}}$.

13．**设** $f(x)\in C(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^l)$，**对任意实数** c，**作集合**

$$E=\{x \mid f(x)>c\},\quad F=\{x \mid f(x)\ge c\}.$$

求证: E **是** $\mathbf{R}^m$ **中的开集**, F **是** $\mathbf{R}^m$ **中的闭集**.

14. $f(x,y)$ **定义在** Ω **内**, **若** $f(x,y)$ **对** x **连续**, **对** y **满足李普希兹条件**, **即对** Ω **中任意两点** $(x,y'),(x,y'')$ **有**

$$\left|f(x,y')-f(x,y'')\right|\le L\left|y'-y''\right|,$$

其中 L **为常数**. **求证** $f(x,y)$ **在** Ω **内连续**.

15. **设** E **是** $\mathbf{R}^m$ **中的有界闭集**. **证明**:

（1）**对给定的** $a\in\mathbf{R}^m$, **存在** $x_0\in E$ **使得** $r(a,E)=r(a,x_0)$.

（2）**存在** $x_0,y_0\in E$, **使得** $d(E)=r(x_0,y_0)$.

16. A **是** $m\times m$ **矩阵**, $\det A$(A**的行列式**) $\neq 0$. **求证**: **存在正常数** a, **使得对任意** $x\in\mathbf{R}^m$ **有**

$$|Ax|\ge a|x|.$$

17. **设有二元数值函数** $f(x,y)$ **在圆周** $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ **上连续**. **证明**: $f(x,y)$ **在** C **上达到上确界** M **和下确界** m, **并且它取属于** (m,M) **所有值至少两次**.